

財團法人大學入學考試中心基金會
112學年度分科測驗試題
數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 \square 與第 18-2 列的 \square 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 \square 與第 19-2 列的 \square 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

- 4 1. 坐標平面上，一質點由點 $(-3, -2)$ 出發，沿著向量 $(a, 1)$ 的方向移動 5 單位長之後剛好抵達 x 軸，其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項？

(1) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (5) $2\sqrt{6}$

- 2 2. 放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有 A 、 B 兩種放射性物質，其半衰期分別為 T_A 、 T_B 。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質 B 的質量為物質 A 的質量的四分之一。根據上述，試問 T_A 、 T_B 滿足下列哪一個關係式？

(1) $-2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (2) $2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (3) $-2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$
(4) $2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$ (5) $2 \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$

- 3 3. 試問極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \left(\sqrt{4n^2 + 9 \times 1^2} + \sqrt{4n^2 + 9 \times 2^2} + \dots + \sqrt{4n^2 + 9 \times (n-1)^2} \right)$$

的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx$ (2) $\int_0^3 \sqrt{1+9x^2} dx$ (3) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2} dx$
(4) $\int_0^3 \sqrt{4+9x^2} dx$ (5) $\int_0^3 \sqrt{4x^2+9} dx$

資料來源：得勝者文教

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

- 1 4. 設 a, b 為實數。已知四個數 $-3, -1, 4, 7$ 皆滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq b$ ，試選出正確的選項。
- 2 (1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq b$
- (2) $3, 1, -4, -7$ 滿足 x 的不等式 $|x+a| \leq b$
- (3) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq \frac{b}{2}$
- (4) b 可能等於 4
- (5) a, b 可能相等
-
- 1 3 5. 考慮實係數多項式 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 。已知方程式 $f(x) = 0$ 有虛根 $1+2i$ （其中 $i = \sqrt{-1}$ ），試選出正確的選項。
- (1) $1-2i$ 也是 $f(x) = 0$ 的根
- (2) a, b 皆為正數
- (3) $f'(2.1) < 0$
- (4) 函數 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極小值
- (5) $y = f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

資料來源：得勝者文教

1
4
5

6. 設 a, b, c, d, r, s, t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\vec{u} = (a, b, 0)$ 、 $\vec{v} = (c, d, 0)$ 及 $\vec{w} = (r, s, t)$ 滿足內積 $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ 。考慮三階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選項。

(1) 若 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(2) 若 $t \neq 0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

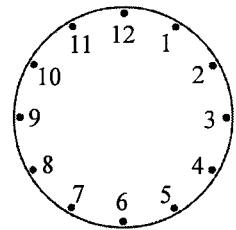
(3) 若存在一個向量 \vec{w}' 滿足 $\vec{w}' \cdot \vec{u} = \vec{w}' \cdot \vec{v} = 0$ 且外積 $\vec{w}' \times \vec{w} \neq \vec{0}$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(4) 若對任意三個實數 e, f, g ，向量 (e, f, g) 都可以表示成 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 的線性組合，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(5) 若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ，則 A 的行列式不等於 0

1
4

7. 有一個依順時針方向依序標示 1, 2, ..., 12 數字的圓形時鐘(如圖所示)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：
- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
 - 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。



例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n ，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置， $P(X_n = k)$ 代表 $X_n = k$ 的機率(其中 $k = 1, 2, \dots, 12$)，且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

(1) $E(X_1) = 6$

(2) $P(X_2 = 12) = \frac{1}{4}$

(3) $P(X_8 = 5) \geq \frac{1}{2^8}$

(4) $P(X_8 = 4) = P(X_8 = 8)$

(5) $E(X_8) \leq 7$

資料來源：得勝者文教

2
3

8. 複數平面上，設 \bar{z} 代表複數 z 的共軛複數，且 $i = \sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。

- (1) 若 $z = 2i$ ，則 $z^3 = 4i\bar{z}$
- (2) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\bar{\alpha}$ ，則 $|\alpha| = 2$
- (3) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\bar{\alpha}$ 且令 $\beta = i\alpha$ ，則 $\beta^3 = 4i\bar{\beta}$
- (4) 滿足 $z^3 = 4i\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主幅角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$
- (5) 恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3 = 4i\bar{z}$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 已知平面上直角 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 、 $\overline{BC} = 2$ 。若分別以 \overline{AB} 與 \overline{AC} 為底邊在 $\triangle ABC$ 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$ ，

$$\text{則 } \overline{MN}^2 = \frac{\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}}{\textcircled{9-3}} \cdot \left(\text{化為最簡分數} \right) = \frac{13}{3}$$

10. 坐標空間中有方向向量為 $(1, -2, 2)$ 的直線 L 、平面 $E_1: 2x + 3y + 6z = 10$ 與平面

$$E_2: 2x + 3y + 6z = -4。 \text{則 } L \text{ 被 } E_1、E_2 \text{ 所截線段的長度為 } \frac{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2}}{\textcircled{10-3}} \cdot \left(\text{化為最簡分數} \right) = \frac{21}{4}$$

資料來源：得勝者文教

11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：主辦單位準備編號 1、2、...、9 的牌卡十張，其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

- (1) 此四位數大於 6400
- (2) 此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。

依上述規則，共有 $\frac{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2} \textcircled{11-3} \textcircled{11-4}}{1 \ 5 \ 5 \ 4}$ 個抽出排成的四位數可獲得獎品。

1 5 5 4

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設 a, b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x) = ax^2$ 的圖形與圓 $\Omega: x^2 + y^2 - 3y + b = 0$ 皆通過點 $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

- 12. 試求向量 \vec{CO} 與 \vec{CP} 夾角的餘弦值。（非選擇題，2 分） $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 13. 試證明 $y = f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。（非選擇題，4 分） 見最後一頁
- 14. 試求 $y = f(x)$ 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。（非選擇題，6 分） $\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$

資料來源：得勝者文教

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角（其中 $0 < \theta < \pi$ ）的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 $\Gamma': 40x^2 + 4\sqrt{5}xy + 41y^2 = 180$ ，點 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15. 橢圓 Γ' 的長軸長為 $\textcircled{15-1} \sqrt{\textcircled{15-2}}$ 。（化為最簡根式）（選填題，2分） $2\sqrt{5}$

16. 試求 Γ' 短軸所在的直線方程式與短軸長。（非選擇題，4分） $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x, 4$

17. 已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 x 軸上，且 P' 點的 x 坐標大於 0。
試求 P 點的坐標。（非選擇題，6分） $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

資料來源：得勝者文教

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

資料來源：得勝者文教

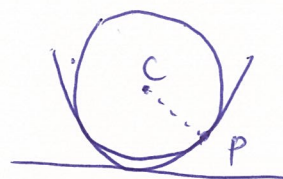
12. $P(1, \frac{1}{2})$ 代入 $f(x) = ax^2$ 得 $a = \frac{1}{2}$.

$P(1, \frac{1}{2})$ 代入 $x^2 + y^2 - 3y + b = 0$ 得 $b = \frac{1}{4}$

$x^2 + y^2 - 3y + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 2 \therefore \Omega \equiv$ 半徑 $\sqrt{2}$, 圓心 $C(0, \frac{3}{2})$

$\vec{CO} = (0, -\frac{3}{2}), \vec{CP} = (1, -1)$

\therefore 所求 $= \frac{\vec{CO} \cdot \vec{CP}}{|\vec{CO}| |\vec{CP}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



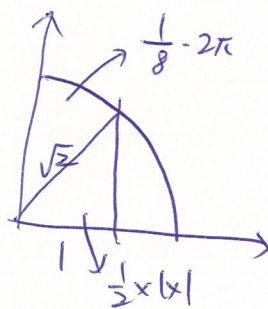
13. $y = f(x)$ 在 $x=1$ 之切線斜率 $= f'(1) = 1$.

圓 Ω 在 $P(1, \frac{1}{2})$ 之切線與 \vec{CP} 垂直, $m_{\vec{CP}} = -1 \therefore m_{\text{切}} = 1$

\therefore 兩者切線相同.

14. 所求 $= 2 \cdot \int_0^1 (\frac{3}{2} - \sqrt{2-x^2} - \frac{1}{2}x^2) dx$

$= 2 \cdot \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx \right]$



$= 2 \left(\frac{4}{3} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$.

資料來源: 得勝者文教